**II. ВОПРОСЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ**

**УРАВНЕНИЯМ**

1. **Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.**

*Определение.* Уравнение вида

, (1)

в котором коэффициенты при и  являются произведениями функций, зависящих только от одной из переменных –  или , называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

В нормальной форме уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

, (2)

т.е. функция в правой части является произведением двух функций, одна из которых зависит только от, а другая – только от .

Из (1) непосредственно следует

,

и после интегрирования получаем общее решение (общий интеграл):

.

*Определение.* Функция  называется *однородной n*-го измерения относительно *x* и *y*, если для всех действительных значений > 0 она удовлетворяет равенству

.

Число *n* называют также *степенью однородности.*

*Примеры:*

 – однородная функция измерения ;

 – однородная функция нулевого измерения ();

– неоднородная функция.

*Определение.* Дифференциальное уравнение первого порядка

 (3)

называется *однородным***,** если его коэффициенты  и являются однородными функциями одного и того же измерения.

Из этого уравнения следует:



Т.к. и  – однородные функции одного измерения, то степень однородности равна нулю:

.

*Определение.*Уравнение

 (4)

называется *однородным,* если функция *f (x,y)* является однородной нулевого измерения относительно *x* и *y*.

В однородном уравнении функцию *f (x,y)* всегда можно представить как функцию одной переменной . Действительно, если ,

то, положив , получим

.

В результате, из (4) следует:

,

и очевидна замена  или . Но тогда , и из исходного уравнения будем иметь:

,

,

.

Получено уравнение с разделяющимися переменными, из которого следует общий интеграл

,

а после возвращения к исходным переменным, т.е. подстановки, приходим к общему интегралу однородного уравнения.

**Пример1***.* Найти частное решение дифференциального уравнения  при заданных начальных условиях , .

Это уравнение с разделяющимися переменными. Выделяем из условия , представляем  как отношение дифференциалов:  и разделим переменные .

Интегрируем: . Мы получили общий интеграл заданного уравнения . Находим его частное значение, удовлетворяющее начальным условиям:  , откуда . Окончательно получаем ответ:  или  или -уравнение гиперболы.

**Пример2***.* Решить уравнение.

*.*Данное уравнение можно представить в виде:

.

Правая часть содержит только отношение вида , следовательно, уравнение является однородным. Найдем общее решение.



Подставляем в заданное уравнение:

3



,

.

Возвращаемся к исходным переменным:



 - общий интеграл исходного уравнения.

**Примеры для самостоятельного решения**

|  |  |
| --- | --- |
| ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ | ОТВЕТЫ |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**2. Методы решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. Найти одним из них общий интеграл заданного уравнения.**

*Определение.* Уравнение вида

, (1)

где *P (x)* и *Q (x)* – непрерывные функции *х*, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

В частности, если , такое уравнение называется *линейным однородным***.** Линейное однородное дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными:



или .

Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка можно двумя способами.

Метод вариации постоянной (метод Лагранжа).

Сначала решается соответствующее однородное уравнение

**,**

которое является уравнением с разделяющимися переменными:

****

****.

Считаем *С* функцией от *x*, то есть

****. (2)

Вычисляя производную

,

и подставляя её совместно с*у* в исходное уравнение, получим:



,

.

В результате, из (2) следует общее решение:

.

Метод Бернулли.

Общее решение линейного уравнения *y*можно представить в виде произведения двух пока изначально неизвестных функций: , одну из которых выбирают произвольно, а другую – в соответствии с исходным уравнением.

Обозначим для краткости: , . Тогда

 и .

Подставим выражения для *y* и в исходное уравнение:

,

 (3)

Выберем *u* так, чтобы в (3) выражение в скобках равнялось нулю, т.е.

 (4)

или .

Получили уравнение с разделяющимися переменными, которое легко интегрируется. При этом константу интегрирования в правой части полагают равной нулю. Тогда

. (5)

После нахождения*u*возвращаемся к уравнению (3), которое при условии (4) приобретает вид:



или, разделяя переменные, .

Тогда с учетом (5) ****.

Интегрирование полученного уравнения дает:

****.

С учетом (5) может быть записано и общее решение уравнения (1):

.

**Пример1** *.*Найти общее решение уравнения 

*Решение.*Метод Лагранжа. Решаем однородное уравнение

:



Разделим переменные: 

Общее решение ищем в виде:

 (\*)

Вычислим производную: и подставим совместно с 

в исходное уравнение:



.

Разделяем переменные и интегрируем:

,

.

Тогда окончательно из (\*) получим

******.

**Пример 2***.*Метод Бернулли.  ,

. Решаем его подстановкой , .

Получаем: ;

; Приравниваем нулю выражение в скобке и составим систему:

;

. Решаем сначала первое уравнение этой системы.

.

Разделим переменные:  .

Найденное значение , подставим во второе уравнение системы ; или

, разделим переменные: возьмём интеграл от обеих частей равенства: , что даёт: . Найдём искомую функцию ;

.

Окончательно имеем общее решение уравнения: .

**Примеры для самостоятельного решения**

|  |  |
| --- | --- |
| ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ | ОТВЕТЫ |
|  |  |
|  |  |
|  | +cx |

1. **Методы решения дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка. Найти одним из них общие интегралы заданных уравнений.**

Рассмотрим две разновидности уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

**1**. Уравнение, не содержащее явно исходную функцию

Для решения введем новую переменную

Подставляя это в первоначальное уравнение, мы получим

Это уравнение первого порядка относительно функции p(x). Найдем общие решение в виде p=f(x,c1) и вместо р подставим . Получим

Это общее решение первоначального уравнения.

**2.** Уравнение, не содержащее явно независимую переменную x

Для решения такого уравнения введем новую переменную , тогда

Подставим результат этого преобразования в первоначальное уравнение и получим

Уравнение первого порядка относительно переменной р, как функции от y. Решением этого уравнения является функция , тогда искомое решение получим из уравнения с разделяющимися переменными

Примеры.

а) Дано уравнение . Найдём частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: , .

**Решение.**

Данное дифференциальное уравнение не содержит явно функцию у. Положим , где есть функция аргумента х. если , то  и данное уравнение примет вид: . Мы получили уравнение первого порядка относительно переменных р и х. Решим это уравнение

 или  Определим численное значение  при указанных начальных условиях.: имеем . Следовательно, . Значит, , теперь решаем уравнение первого порядка:

 или: . Определим численное значение  при указанных начальных условиях, имеем , .

Таким образом,  есть частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

**Ответ:** .

б) дано уравнение второго порядка: .

Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям , .

**Решение.**

Данное уравнение второго порядка не содержит явно аргумента х. Положим ,

где , если некоторая функция переменной у. Если ,

то , т.е. .

Тогда данное уравнение примет вид

, или , Выносим *р* за скобки . Если приравнять к нулю первый множитель: , , , т.е. - решение данного уравнения.

Приравниваем к нулю второй множитель: .

Разделим переменные: ;  или ,

Используя начальные условия, находим

. Далее решаем уравнение:

.

Теперь определим числовое значение :

**;

Тогда *;* из этого соотношения находим величину *у*

; ; мы получим искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

**Ответ:** .

**Примеры для самостоятельного решения**

|  |  |
| --- | --- |
| ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ | ОТВЕТЫ |
| ; , . |  |
| ; , . |  |
| ; , . |  |

1. **Дифференциальные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема об общем решении линейного неоднородного дифференциального уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами. Вид частного решения для случая, когда правая часть – . Показать на предложенном примере.**

Согласно теореме об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения общим решением уравнения

в котором – константы, является линейная комбинация

n линейнонезависимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами . При этом используются следующие этапы решения:

(1) Составляется характеристическое уравнение

.

(2) Находятся корни характеристического уравнения

.

(3) В зависимости от вида корней записываются частные линейно независимые решения по следующим правилам:

а) каждому действительному однократному корню  соответствует частное решение ;

б) каждому действительному корню  кратности  соответствует  линейно независимых частных решений

;

в) каждой паре комплексных сопряженных однократных корней



соответствуют два частных решения

 и ;

г) паре комплексных сопряженных корней



соответствует 4 частных решения:



В каждом случае число частных решений будет равно степени характеристического уравнения (т.е. порядку *п* линейного дифференциального уравнения).

(4) Найдя  линейно независимых частных решений , строим общее решение данного линейного уравнения:

где  – произвольные постоянные.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (уравнение с правой частью):

. (1)

Здесь ,,– постоянные действительные числа.

Соответствующее (1) *однородное* уравнение

 (2)

Называть *сопровождающим* для дифференциального уравнения (1).

*Теорема. Если  есть какое-либо частное решение уравнения* (1) *, и*

**(3)

*– общее решение его сопровождающего уравнения* (2) *, то их сумма*

**

*– есть общее решение дифференциального уравнения* (1) *.*

Решения  однородного уравнения (2) находится с помощью характеристического уравнения

. (4)

Пусть в уравнении (1) ,

где  – действительное число, а  – многочлен *n*-й степени от аргумента *х*.

Естественно предположить, что частное решение  будет иметь вид, аналогичный :

=, (5)

где  – также полином *n* -й степени, зависящий от *х*.

Тогда возможны следующие три случая.

**1**. Если и , где корни характеристического уравнения (4), то

=. (6)

**2**. Если или , где корни характеристического уравнения (4), то.

=, (7)

**3.** Если , где корни характеристического уравнения (4), то

=, (7)

**Пример1** . Это линейное однородное уравнение четвертой степени.

**Решение**

Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:



 – действительный корень кратности 2;

 – действительный корень кратности 2.

Записываем общее решение:

.

**Пример2** Найти общее и частное решение дифференциального уравнения , удовлетворяющее начальным условиям: ; .

**Решение.**

Данное дифференциальное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Его решение будем искать в виде  где  - общее решение однородного уравнения , соответствующего данному неоднородному, а -частное решение неоднородного уравнения в зависимости от вида правой части. Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид:  , оно имеет корни  , , тогда получаем

 или . Для нахождения у воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Имеем. ,  ,

Подставим теперь выражения для  в исходное уравнение:



Разделим обе части на  и приведём подобные члены после чего получим

, откуда составим систему: .

Решением этой системы будут значения  , , следовательно решение

.

Общее решение исходного уравнения примет вид:



Для нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, определим значение  и : , , .

;

 составим систему из двух уравнений.



Окончательно получим: .

**Ответ:** .

**Примеры для самостоятельного решения**

|  |  |
| --- | --- |
| ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ | ОТВЕТЫ |
|  |  |
| ; |  |
|  |  |

**ЗАДАНИЯ НА ГАК**

**ЗАДАНИЕ1**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ответы |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**ЗАДАНИЕ2**

|  |  |
| --- | --- |
|  | (arctgx+c) |
|  |  |
|  |  |

**ЗАДАНИЕ3**

|  |  |
| --- | --- |
| ; , . |  |
| ; , |  |
| ; , . |  |

**ЗАДАНИЕ4**

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |
| ; |  |
| ; |  |